

**Examen de Admisión a la Maestría**  
**1 de Julio de 2015**

Nombre: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** En cada reactivo seleccione la respuesta correcta encerrando en un círculo la letra correspondiente. Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron.

**Duración del examen: 2 horas**

1. Si  $A$  es una matriz  $4 \times 4$  tal que  $A^5 = 0$ , entonces se puede afirmar que

- (a)  $A^4 = I$       (b)  $A^4 = A$       (c)  $A^4 = 0$       (d)  $A^4 = -I$       (e)  $A = 0$

2. La dimensión (sobre los reales) del subespacio generado por los siguientes vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{es}$$

- (a) 2      (b) 3      (c) 4      (d) 5      (e) 6

3. El rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$  es

- (a) 1      (b) 2      (c) 3      (d) 4      (e) 5

4. Si  $M$  es la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $M^{100}$  es igual a

- (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$       (b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$       (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       (d)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) ninguna de las anteriores

5. Si  $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = 9$ , entonces  $\det \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g - 4a & h - 4b & k - 4c \\ d & e & f \end{pmatrix} =$

- (a) -27      (b) -108      (c) 3      (d) 12      (e) 27

6. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es una base para el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  que consiste de todos los vectores ortogonales a  $(0, 1, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1, 0)$ ?

- (a)  $\{(0, -1, 1, 0)\}$
- (b)  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
- (c)  $\{(-2, 1, 1, -2), (0, 1, -1, 0)\}$
- (d)  $\{(1, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$
- (e)  $\{(0, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$

7. Si  $V_1$  y  $V_2$  son subespacios de dimensión 6 de un espacio vectorial  $V$  de dimensión 10, ¿cuál es la mínima dimensión que puede tener  $V_1 \cap V_2$ ?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 4
- (e) 6

8. Si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$  tal que  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , entonces

el producto  $A \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$  es igual a

- (a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$

(e) no está determinada de manera única por la información dada

9. La suma de los valores propios de la matriz  $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 7 & 1 & -21 \\ 11 & -21 & 6 \end{pmatrix}$  es

- (a) 4
- (b) 23
- (c) 11
- (d) 12
- (e) -11

10. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(a, b, c) = (0, a, b)$ , para todo  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Entonces  $T + I$  es raíz del polinomio

- (a)  $t$
- (b)  $t + 1$
- (c)  $t^2$
- (d)  $t^3$
- (e) ninguno de los anteriores

11. Por el rango de una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  entendemos

- (a)  $\dim \text{Im } T$
- (b)  $\dim \ker T$
- (c)  $\dim V$
- (d)  $\dim W$
- (e)  $\dim W - \dim V$

12. Si  $T : U \rightarrow V$  es una transformación lineal de  $U$  en  $V$  entonces

- (a) el núcleo de  $T$  es un subespacio de  $U$
- (b) el núcleo de  $T$  es un subespacio de  $V$
- (c) la imagen de  $T$  es un subespacio de  $U$
- (d)  $V$  siempre es la imagen de  $T$
- (e)  $V$  es la imagen de  $T$  si y sólo si  $\ker T = \{0\}$

13. ¿Cuál de las siguientes transformaciones no puede llevarse a cabo por medio de operaciones elementales?

- (a)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
- (e)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

14. El rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$  es

- (a) 0
- (b) 5
- (c) 3
- (d) 1
- (e) ninguno de los anteriores

15. El determinante de la matriz dada en el ejercicio 3 es

- (a) 10
- (b) 4
- (c) 3
- (d) 0
- (e) ninguno de los anteriores

16. Dos soluciones linealmente independientes de la ecuación  $y'' + y' - 6y = 0$  son

- (a)  $e^{-3x}$  y  $e^{2x}$
- (b)  $e^{-2x}$  y  $e^{3x}$
- (c)  $e^{-x}$  y  $e^{6x}$
- (d)  $e^{-6x}$  y  $e^x$
- (e)  $\sin 3x$  y  $\cos 2x$

17. Si  $F(1) = 2$  y  $F(n) = F(n-1) + \frac{1}{2}$  para todos los enteros  $n > 1$ , entonces  $F(101) =$

- (a) 50
- (b)  $50\frac{1}{2}$
- (c) 51
- (d)  $51\frac{1}{2}$
- (e) 52

18. Supóngase que  $f$  es una función real tal que  $f'(x_0)$  existe. ¿Cuál de los siguientes es el valor de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \quad ?$$

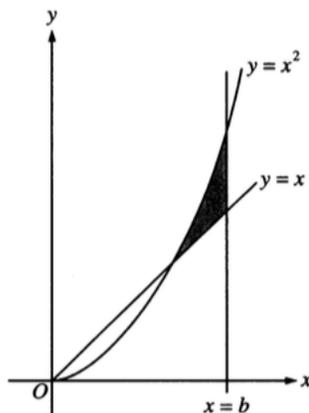
- (a) 0      (b)  $f'(-x_0)$       (c)  $2f'(x_0)$       (d)  $-f'(x_0)$       (e)  $f(x_0 + h)$
19. Si  $\ln x - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ , entonces  $x =$
- (a)  $\frac{1}{e^2}$       (b)  $\frac{1}{e}$       (c)  $e$       (d)  $2e$       (e)  $e^2$
20. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $a, b$  son números reales, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I.  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x-3) dx$

II.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^3 f(x) dx - \int_b^3 f(x) dx$

III.  $\int_{3a}^{3b} f(x) dx = 3 \int_a^b f(3x) dx$

- (a) Solo I      (b) Solo II      (c) Solo I y II      (d) Solo II y III      (e) I, II y III
21. Si  $b > 0$  y  $\int_0^b x dx = \int_0^b x^2 dx$ , entonces el área de la región sombreada en la siguiente figura es



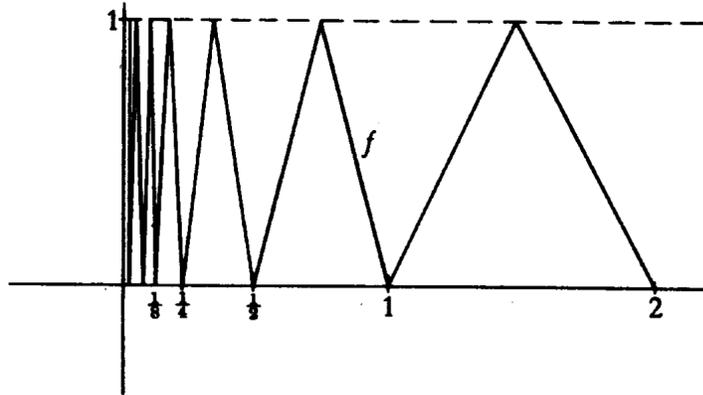
- (a)  $\frac{1}{12}$       (b)  $\frac{1}{6}$       (c)  $\frac{1}{4}$       (d)  $\frac{1}{3}$       (e)  $\frac{1}{2}$

22. Supongamos que las primeras derivadas parciales de  $z = f(x, y)$  están dadas por  $f_x = 2x$ ,  $f_y = -2y$ . Entonces el punto  $(0, 0)$  representa
- un mínimo relativo
  - un máximo relativo
  - un punto silla
  - no se puede saber
  - $(0, 0)$  no es punto crítico
23.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$  es la serie de Taylor alrededor de 0 de cuál de las siguientes funciones
- $\sin x$
  - $\cos x$
  - $e^x$
  - $e^{-x}$
  - $\ln(1+x)$
24. Si  $n$  es un entero no negativo, entonces  $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx$  para
- ningún  $n$
  - solo para  $n$  par
  - solo para  $n$  impar
  - solo para  $n \neq 0$
  - para todo  $n$
25. Para  $x \in \mathbb{R}$  considere la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?
- la serie siempre diverge
  - la serie siempre converge
  - la serie converge si  $|x| \leq 1$  y diverge si  $|x| > 1$
  - la serie converge si  $|x| \geq 1$  y diverge si  $|x| < 1$
  - ninguna de las anteriores
26. El  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan 3(x+h) - \tan(3x)}{h}$  es igual a
- 0
  - $3 \sec^2(3x)$
  - $\sec^2(3x)$
  - $3 \cot(3x)$
  - no existe
27. Sea  $P$  el plano tangente a la superficie  $x + x^2y + 2yz^3 = z - 3xyz$  en el punto  $(1, 0, 1)$ . ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a  $P$ ?
- $(-1, 2, 3)$
  - $(-1, 0, 1)$
  - $(-1, 1, 1)$
  - $(-1, 0, -1)$
  - $(1, 1, -1)$

28. ¿Cuál es el valor de la integral  $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ ?

- (a) 0      (b) 1      (c) 2.5      (d) 4      (e) ninguna de las anteriores

29. Considere la función que tiene la siguiente gráfica. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es válida.



- (a) la función no es integrable  
 (b) la función es integrable y el valor de la integral es 2  
 (c) la función es integrable y el valor de la integral es  $\frac{1}{2}$   
 (d) la función es integrable y el valor de la integral es 1  
 (e) ninguna de las anteriores

30. Considere la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

- (a) las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no existen en el punto  $(0, 0)$   
 (b) las parciales en  $(0, 0)$  existen y son iguales. Por lo tanto  $f$  es derivable en  $(0, 0)$   
 (c) las parciales en  $(0, 0)$  existen y son iguales pero  $f$  no es derivable en  $(0, 0)$   
 (d) las derivadas parciales existen en todo punto  
 (e) ninguna de las anteriores