Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

14 de Agosto de 2006

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 2 horas.

1. Algebra lineal

1.1 ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ es invertible la matriz

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad ?$$

1.2 Diga cuales de las siguientes son transformaciones lineales. En caso afirmativo, describa $\ker T$.

(a) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(v) = v + v_0$, para un vector fijo $v_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad T(z_1, \ldots, z_n) = (\bar{z_1}, \ldots, \bar{z_n})$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(v) = \langle v \times v_0, v_1 \rangle$, para vectores fijos $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^3$.

(d) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad T(v) = \langle v, v \rangle$.

(e) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \langle x, a \rangle a$, para $a \in \mathbb{R}^n$ fijo.

(f) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \langle x, a \rangle \cdot x$, para $a \in \mathbb{R}^n$ fijo.

1.3 Sea A_n la matriz $n \times n$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1 \\ 1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ 2\cos\theta & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Si $\Delta_n = \det A_n$, pruebe que $\Delta_{n+2} - 2\cos\theta\,\Delta_{n+1} + \Delta_n = 0$.

2. Cálculo

2.1 Encuentre un polinomio f del menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1 \qquad f(x_2) = a_2 \qquad f'(x_1) = b_1, \qquad f'(x_2) = b_2$$

donde $x_1 \neq x_2$ y a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales dados.

2.2 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ es convergente o no.

2.3 Encuentre el punto del primer cuadrante, sobre la parábola $y = 4 - x^2$, de modo que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes coordenados tenga área mínima.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea A_n es la matriz del problema **1.3**. Pruebe que para $0 < \theta < \pi$, $\det A_n = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

3.2 Si γ es la circunferencia de centro 0 y radio 2, orientada positivamente, pruebe que

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz = 2\pi i e$$

3.3 Dar ejemplos de dos grupos de orden 24, no abelianos y que no sean isomorfos.

3.4 Enuncie y pruebe el teorema de punto fijo de Brower.