Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
15 de Diciembre de 2017

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo seleccione las respuestas correctas rellenando los círculos correspondientes. Para una misma pregunta pueden haber varios círculos correctos (rellene todos). Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron. **No se puede usar calculadora o celular.**

Duración del examen: 2 horas

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

   ○ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 2\}$;

   ○ el conjunto de matrices de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;

   ○ el conjunto de polinomios $p(x)$ con $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$;

   ○ el conjunto de números reales con la suma dada por $x \oplus y = xy$ y la multiplicación por escalares dada por $a \otimes x = x^a$.

2. Sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los números racionales. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   ○ $\dim(V)$ es numerable;

   ○ $\dim(V)$ no es numerable;

   ○ $\dim(V) = 1$;

   ○ V no tiene base.

3. Sea $S := \{(1, 1, 1, x), (1, 1, x, 1), (1, x, 1, 1,), (x, 1, 1, 1,)\}$. ¿Para cuántos valores distintos de x, S no es una base para $\mathbb{R}^4$?

   ○ 0;

   ○ 1;

   ○ 2;

   ○ cualquier valor de x.

4. Considera k ecuaciones lineales en n variables, las cuales escritas en forma matricial resultan en la ecuación $AX = Y$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   - ◯ si $n = k$ entonces siempre hay a lo más una solución;
   - ◯ si $n > k$ entonces siempre se puede resolver $AX = Y$;
   - ◯ si $n < k$ entonces para algún Y no hay solución de $AX = Y$.
   - ◯ Si $n < k$ entonces la única solución de $AX = 0$ es $X = 0$.

5. Sea A una matriz cuadrada real. La afirmación "A es invertible si y solo el cero no es un valor propio." es

   - ◯ falsa;
   - ◯ verdadera.

6. La afirmación "Cualquier polinomio mónico $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es el polinomio característico de alguna matriz de $n \times n$." es :

   - ◯ falsa;
   - ◯ verdadera.

7. Sea V el espacio vectorial de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con producto interior definido por $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sea $S = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \dots\}$. Entonces

   - ◯ S es ortogonal;
   - ◯ S es ortonormal;
   - ◯ S es una base para V.

8. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene V?

   - ◯ $(3^n - 1)$;
   - ◯ $3n$;
   - ◯ $(3^n - 1)/2$;
   - ◯ 1.

9. Encuentre el polinomio característico de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- ◯ $-t^3 + t^2 + 10t - 4$;
- ◯ $t^3 + t^2 + 10t - 4$;
- ◯ $t^3 - t^2 - 2t - 4$;
- ◯ $t^3 - t^2 + 2t + 4$.

10. Un grafo G es un par (V, E) donde $V = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto de vértices, y E es un conjunto de pares de vértices llamados *aristas*. Si $\{i, j\} \in E$ decimos que i y j son adyacentes. Sea A la matriz de $n \times n$ donde $A_{ij} = 1$ si i es adyacente a j y $A_{ij} = 0$ de otro modo. Supón que todo vértice de G es adyacente exactamente con d otros vértices. Entonces:

- ◯ $(1, \dots, 1)$ es un eigenvector de A.
- ◯ A siempre es invertible;
- ◯ A es triangular superior;

11. Supongamos que la matriz A es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

- ◯ $A^2 = A$;
- ◯ $\det(A) = 0$;
- ◯ $\text{traza}(A) = 1$;
- ◯ $\lambda = 0$ es un valor propio de A;
- ◯ $\lambda = 1$ es un valor propio de A.

12. Sea A una matriz de $n \times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- ◯ $-v$ es un vector propio de $-A$ con valor propio de $-\lambda$.
- ◯ Si B es una matriz de $n \times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB.
- ◯ Sea c un escalar. Entonces $(\lambda + c)^2$ es valor propio de $A^2 + 2cA + c^2 I$.
- ◯ Si μ es valor propio de una matriz B de $n \times n$, entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $A + B$.
- ◯ $-\lambda$ es una raíz del polinomio característico de A.

13. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3+7x}{4x^3+5}}.$$

- ◯ ∞;
- ◯ $-\infty$;
- ◯ 0;
- ◯ $\frac{1}{2}$.

14. Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

- ◯ ∞;
- ◯ 1;
- ◯ 0;
- ◯ e.

15. Sea α un número real, considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha n}.$$

¿Para qué valores de α converge esta serie?

- ◯ $\alpha \leq 0$;
- ◯ $\alpha < 0$;
- ◯ $\alpha \leq -1$;
- ◯ $\alpha < -1$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que su serie de Taylor converge a $f(x)$ para todo número real x. Si $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$ y $f^{(n)}(0) = 3$ para todo $n \geq 2$, entonces $f(x)$ es igual a

- ◯ $3e^x + 2x - 1$;
- ◯ $e^{3x} + 2x + 1$;
- ◯ $3e^x - x - 1$.
- ◯ $e^{3x} - x + 1$.

17. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente como sigue: $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$

- ◯ diverge;
- ◯ converge a $\frac{2}{\sqrt{2}}$;
- ◯ converge a 2;
- ◯ converge a e.

18. Sea $f(x) = 1/(1+x)$, para $x \neq -1$. ¿Cuál es la n-ésima derivada de $f(x)$?

- ◯ $(-1)^n n!/(1+x)^{n+1}$.
- ◯ $n!(1+x)^{n+1}$;
- ◯ $-n!/(1+x)^{n+1}$;
- ◯ $n!/(1+x)^{n+1}$;

19. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,y) = x^2y$, dado que $x^2 + y^2 = 1$?

- ◯ $\frac{4\sqrt{3}}{27}$;
- ◯ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$;
- ◯ $\frac{\sqrt{3}}{9}$;
- ◯ $\frac{2}{3}$.

20. Calcule la integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

- ◯ $\sqrt{\pi}$;
- ◯ $\frac{\pi}{2}$;
- ◯ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
- ◯ 1.

21. Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos x dx$.

- ◯ $(\pi^2 + 8\pi - 32)$;
- ◯ $\frac{\sqrt{2}}{32}(\pi^2 + 8\pi - 32)$;
- ◯ $\sqrt{2}(\pi^2 + 8\pi - 32)$;
- ◯ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8\pi + 32)$.

22. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(e^t); \\ y(t) &= \operatorname{sen}(e^t); \\ z(t) &= e^t; \end{aligned}$$

con $t \in [0, 2]$ ¿Qué longitud tiene la curva?

- ◯ $\int_0^2 \sqrt{1 + e^{2t}} dt$;
- ◯ $e^4 - 1$;
- ◯ $\frac{e^4+3}{2}$.
- ◯ $\sqrt{2}(e^2 - 1)$;

23. ¿Cuál es el volumen de la región cerrada en $\mathbb{R}^3$ acotada por $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 0$?

- ◯ $\frac{27\pi}{2}$
- ◯ 18π;
- ◯ $\frac{81\pi}{2}$
- ◯ 81π.

24. $\frac{\partial \operatorname{sen}(xy)}{\partial x^2 \partial y} =$

- ◯ $-xy^2 \cos(xy) - 2y \operatorname{sen}(xy)$;
- ◯ $-x^2 y \operatorname{sen}(xy) - 2y \operatorname{sen}(xy)$;
- ◯ $-x^2 y \operatorname{sen}(xy) - 2x \cos(xy)$;
- ◯ $x^2 y \operatorname{sen}(xy)$.

25. Sea G un grupo finito tal que para todo par de subgrupos H, K de G se tiene que $H \subset K$ o $K \subset H$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

- ◯ G es cíclico de orden primo.
- ◯ G podría no ser abeliano.
- ◯ G es un grupo cíclico de orden la potencia de un primo.
- ◯ G solo tiene dos subgrupos.

26. Sea S_n el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Sea H el grupo generado por las permutaciones $(1,2)$ y $(1,2,3,\ldots,n)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- ◯ H es abeliano;
- ◯ H el grupo diédrico D_n;
- ◯ H es el grupo alternante A_n;
- ◯ H es todo S_n.

27. ¿Cuántos de sus elementos generan a $\mathbb{Z}_9$?

- ◯ 1;
- ◯ 6;
- ◯ 9;
- ◯ 8.

28. ¿Cuáles de las siguientes funciones definen una métrica en $\mathbb{R}$?

- ◯ $d(x,y) = xy$;
- ◯ $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.
- ◯ $d(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$
- ◯ $d(x,y) = (x-y)^2$.

29. ¿Cuáles de los siguientes son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$?

- ◯ $[0,1] \cup [5,6]$;
- ◯ $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;
- ◯ $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1$ x es irracional $\}$;
- ◯ $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$.

30. ¿Cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas?

- ◯ $f(x) = \ln x$ en el intervalo $(0,1)$;
- ◯ $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,\infty]$;
- ◯ $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,\infty]$;
- ◯ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el intervalo (∞,∞).