Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

10 de enero de 2000

1. Algebra lineal

1.1 Calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una base para el espacio nulo de A.

(b) Encontrar una base para el espacio columna de A.

(c) Determinar la unidad de A y el rango de A, que son las dimensiones de los espacios en los incisos anteriores.

1.3 Sea A una matriz invertible real cualquiera. Probar que existen matrices reales P simétrica definida positiva y Q ortogonal (i.e. QQ^t =I) tales que $A = PQ$.
(Sugerencia: Utilizar las propiedades de AA^t.)

2. Cálculo

2.1 Encontrar la derivada de la función F definida en $[0, 1]$ para cada una de las siguientes definiciones:

(a) $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1} dt$,

(b) $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2 dt,}$

2.2 Determinar para qué valores enteros de p la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$converge.

2.3 Calcular la integral de línea de $F(x,y) = (x^2, xy)$ a lo largo de la trayectoria del origen al punto (1,1) por la parábola $y = x^2$.

3. Problemas opcionales

3.1 Demostrar que el grupo cociente $\mathbb{C}^*/S^1$ es isomorfo a $\mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}, \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ son considerados como grupos multiplicativos. Además, dar una interpretación geométrica de las clases de equivalencia del grupo cociente $\mathbb{C}^*/S^1$.

3.2 Probar que todo grupo finito de orden primo es cíclico.

3.3 Encontrar, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden 6.

3.4 Probar que un espacio de Hilbert de dimensión infinita la bola unidad cerrada no es compacta.

3.5 Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida sobre un abierto U de $\mathbb{C}$. Probar que las partes real e imaginaria de f son fun ciones armónicas.