Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

08 de enero de 2006

1. Algebra lineal

1.1 Evaluar el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ cada que $i \neq j$. Si para todo i sabemos que $v_i \neq 0$ demuestre que B es una base de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Sea $V = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] | deg(f) \leq 5\}$. Sea $T : V \longrightarrow \mathbf{R}^6$ dada por

$$T(f) = (f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5))$$

Demuestre que T es lineal y halle su núcleo.

2. Cálculo

2.1 Sea $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^3} t(t-3)dt$$

Calcular $f'(x)$

2.2 Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ diferenciable. Demuestre que f es uniformemente continua.

2.3 Demuestre que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2$ es invertible.

3. Problemas opcionales

3.1 Decida que es más probable al lanzar un dado repetidamente. Obtener un 6 en seis tiradas o al menos dos 6's en doce tiradas.

3.2 Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice dos. Probar que H es normal en G.

3.3 Demuestre que si una función holomorfa del plano complejo (entera) satisface

$$|f(z)| \leq C|z|^n$$

para una constante positiva C y un natural n, entonces f es un polinomio y su grado es menor o igual que n.

3.4 Demuestre que el intervalo cerrado $X = [0, 1]$ es compacto, es decir, demuestre que toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.