Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

22 de enero del 2001

1. Algebra lineal

1.1 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el polinomio característico de A.

(b) ¿Es A similar a una matriz diagonal?

1.2 Sea $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con $a_0 \neq 0$ y sea A una matriz cuadrada. Probar que si $p(A) = 0$, entonces A es invertible.

1.3 Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que consiste de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z + w &= 0 \\ x + y + z - w &= 0 \\ 2x \qquad - 4z - w &= 0 \end{aligned}$$

Determina una base para V.

2. Cálculo

2.1 Sea $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyeccin $\pi_1(x, y) = x$. ¿Es π_1 una función cerrada?

2.2 Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \int_x^{x^2} \cos(1 + t)dt$$

Calcular $g'(x)$

2.3 Determinar las dimensiones del prisma rectangular con base cuadrada de superficie mínima entre todos los que tienen volumen fijo V.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea P el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}^n$ del sistema de desigualdades lineales:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

donde a_{ij} y b_i son números reales para todo i, j. Suponga que $P \neq \theta$. ¿Es P un conjunto cerrado?. ¿Es P convexo?

3.2 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifique su respuesta.

(a) Todo grupo cíclico infinito es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}+)$ de los enteros con la suma.

(b) Dos grupos abelianos finitos del mismo orden son somorfos.

3.3 Probar que cualesquiera dos subconjuntos abiertos conexos de la recta real son homorfos. ¿Es cierta esta afirmación cuando se cambia la recta real por $\mathbb{R}^n$ cuando $n \geq 2$? Justifique su respuesta.

3.4 Probar que si una función holomorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ satisface $|f(z)| \leq C|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, donde C es una c onstante positiva y n es algun entero positivo, entonces f es un polinomio de grado $\leq n$.