Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

18 de enero de 1999

1. Algebra lineal

1.1 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, donde $\alpha_1 = (2,1,1), \alpha_2 = (-1,2,0), \alpha_3 = (7,-4,2), \alpha_4 = (1,1,1)$.

Determinar una base de W contenida en $\mathcal{B}$.

1.2 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-x+y, x+2y)$.

(a) Hallar la representación matrical A de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$, donde $\beta_1 = (1,0), \beta_2 = (1,1)$. Hallar la representación matrical D de T relativa a la base $\mathcal{B}$.

(c) Hallar (o demostrar que existe) una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.

1.3 Sea A una matriz cuadrada con entradas reales. Se dice que A es diagonalizable si existe matriz invertible P con entradas reales tal que PAP^{-1} es una matriz diagonal.

(a) Dar alguna condición necesaria y/o suficiente para que$A$ sea diagonalizable.

(b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que A no es diagonalizable.

(c) Demostrar que si $A^2 = A$, entonces A es diagonalizable.

2. Cálculo

2.1 Calcule la derivada de la función F definida en [0,1] como:
$F(x) = \in 3{,}2t^{x}_{x^2}\sqrt{1+t^2}dt.$

2.2 Probar que existe algún número real $a > 0$ tal que tan $a = a$.

2.3 Si $f(0,0) = 0$, y

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

demuestre que las derivadas parciales de f existen en todo punto de $\mathbb{R}^2$.Es f continua en (0,0)?.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los numeros reales con la topología usual.Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) La unión finita de abiertos es abierto.

(b) La unión arbitraria de cerrados es cerrado.

(c) Todo conjunto infinito y acotado tiene una sucesión de puntos distintos que converge en $\mathbb{R}$.

3.2 Sean $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ dos funciones polinomiales con coeficientes reales. Probar que si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in [0,1]$, entonces $f(a) = g(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$

3.3 Sean $f(a)$ dos funciones continuas y no-negativas sobre $[a, \infty)$ y sea

$$L := \lim_{x\to\infty} [f(x)/g(x)]$$

Demuestre:

(a) Si $0 < L < \infty$, entonces ambas integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen o ambas divergen

(b) Si $L = 0$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

(c) Si $L = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

3.4 Si (X, d) es un espacio métrico y A es un subconjunto no vacío de X, defiimos
$d(x, A) = \inf \{d(x, a) | a \in A\}$.
Si $\overline{A}$ denota la cerradura de A, demuestre que $\overline{A} = \{x | d(x, A) = 0\}$.