Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

21 de febrero de 2000

1. Algebra lineal

1.1 Encontrar los valores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores (1,2,1), (1,3,0), (0,1,-1) y (1,1,2).

1.3 Sea A y B matrices reales $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente. Probar que si $m < n$, entonces det $(AB) \neq 0$.

2. Cálculo

2.1 Para cada número real a, sea $f_a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = e^{ax}$. Determine para qué valores de a la función f_a es uniformemente continua sobre $[0, \infty)$.

2.2 Para la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - 2x^2$ calcular los extremos locales, puntos de inflexión y los intervalos en que es creciente, decreciente, cóncava o convexa. Usar esta información para bosquejar su gráfica.

2.3 Calcular la integral de linea:

$$\int_\alpha \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

donde $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la curva dada por $\alpha(t) =$(cos $(t) =$, sin (t)).

3. Problemas opcionales

3.1 Probar que todo grupo de orden 4 es isomorfo a $\mathbb{Z}^4$ o a $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$.

3.2 Sea $\triangle = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$ el disco unidad. Probar que si una función holomorfa $f : \triangle \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es acota da cuando $z \longmapsto 0$, entonces f se extiende a una función holomorfa sobre $\triangle$.

3.3 Dados A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se define $d(A, B) = \inf \{d(x, y) | x \in A$, y $\in B\}$. Probar que si A es compacto, B es cerrado y $A\underline{i}gcapB = \phi$, entonces $d(A, B) > 0$. Dar un ejemplo que muestre que esto no se cumple cuando A es solamente cerrado.

3.4 Dar un ejenplo de sucesión de funciones en $L_2(\mathbb{R})$ que converja a 0 puntualmente pero que no converja a 0 con la norma L_2.