Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

16 de julio del 2001

1. Algebra lineal

1.1 ¿Existirn números reales r_1, r_2, r_3 y r_4 tales que los polinomios:

$$p_1(x) = (x - r_1)(x - r_2),$$
$$p_2(x) = (x - r_2)(x - r_3),$$
$$p_3(x) = (x - r_3)(x - r_4),$$
$$p_4(x) = (x - r_4)(x - r_1),$$

sean linealmente independientes?

1.2 Determine los valores de θ para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es definida por

1.3 Considere a $\mathbb{R}^3$ como el producto interno:
$< \vec{u}, \vec{u} >= u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$

(a) Utilize el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base

$$\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

en una base ortonormal γ .

(b) Obtenga la matriz de cambio de base de β a γ.

2. Cálculo

2.1 Calcule las soluciones de la ecuacin $F'(x) = 0$, donde $F : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$F(x) = x + \int_0^{\cos x} \sqrt{1 - x^2 dx}.$$

2.2 Se tiene un círculo y un cuadrado de áreas A_1 y A_2, respectivamente. Determine el máximo posible de $A_1 + A_2$, sujeto a la condición de que la suma de los perímetros es constente e igual a 10.

2.3

(a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(e/n)^n$ es convergente.

(b) Use (a) para probar que la integral $\int_1^{\infty}(e^y/y^y)dy$ existe.

(c) Usando (b), y una substitución adecuada, decida si la siguiente serie converge o no.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

3. Problemas opcionales

3.1 Sea X el espacio vectorial que consiste de todas las funciones continuas $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con la norma del supremo : $\|f\| = \sup |f(x)|_{x \in [0,1]}$. Diga si x es compacto.

3.2 Liste todos los grupos abelianos de orden 24 (salvo isomorfismo).

3.3 Sea $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$el disco unitario cerrado en el plano complejo extendido $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Encuentre constent es a, b, c, d tales que la función $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ manda el interior de D en su exterior $\bar{\mathbb{C}} \backslash D$.