*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*
*Departamento de Matemáticas*

**Examen de admisión a la Maestría**

09 de julio de 1999

# 1. Algebra lineal

1.1 Sea una matriz de orden $n$ con entradas reales y sea $I$ la matriz identidad de orden $n$. Si $A^2 = 2I$, demostrar que $A + I$ es invertible y expresar su inversa en trminos de $A$ y de $I$.

1.2 Determinar la matriz (respecto de la base canónica) de un operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $T^2 = I$ y $T((1,1)) = (1,0)$.

1.3 Para que valores de los siguientes vectores generan un subespacio de dimensión 2?
$\alpha_1 = (a,1,0), \alpha_2 = (1,a,1), \alpha_3 = (0,1,a), \alpha_4 = (1,1,1)$.

# 2. Cálculo

2.1 Calcule la edrivada de la función F definida en $[0,1]$ como:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2 dt.}$$

2.2 Probar que una de las siguientes series es convergente y la otra divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

2.3 Sean $k$ un entero positivo fijo y $a$ un número real tal que $0 < a < 1$. Demostrar que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \binom{n}{k} a^n = 0$$

Recuerde que, por definición,$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)}$.

# 3. Problemas opcionales

3.1 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con la topología usual.Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) La unión de toda familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(b) La unión de toda familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(c) Todo conjunto infinito y acotado tiene una sucesión de puntos distintos que convergen en $\mathbb{R}$.

3.2 Sean $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ dos funciones polinomiales con coeficientes reales . Probar que si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in [0, 1]$, entonces $f(a) = g(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

3.3 Sean $f, g$ dos funciones continuas y no-negativas sobre $[a, \infty)$ y suponga que existe el límite:

$$L := \lim_{x \longrightarrow \infty} [f(x)/g(x)].$$

Demuestre:

(a) Si $0 < L < \infty$ entonces ambas integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen o ambas divergen.

(b) Si $L = 0$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

(c) Si $L = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

3.4 Si $(X, d)$ es un espacio métrico y $A$ es un subconjunto no vacío de $X$, definimos

$d(x, A) := \inf\{d(x, a) | a \in A\}$

Si $\overline{A}$ denota la cerradura de A, demuestre que $\overline{A} = \{x | d(x, A) = 0\}$.

3.5 Sea $f : [0, 1] \longrightarrow (0, 1)$ una función continua. Considere la ecuación $g(x) = 1$, donde:

$$g(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Tiene esta ecuación alguna solución en $[0, 1]$?

(b) Tiene esta ecuación una solución única en $[0, 1]$?