Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

Noviembre de 2004

1. Algebra lineal

1.1 Sea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ el espacio vectorial formado por todas las matrices cuadradas $[2 \times 2]$; considere además la transformación lineal $T : \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ dada por $T(A) = AB$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los **cuatro** eigenvalores de T; y de un ejemplo de un eigenvector asociado a cada uno de los posibles eigenvalores.

1.2 Considere la siguiente transformacón lineal $T : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$T(u_1, u_2, u_3, u_4) = det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontrar una base ortogonal para el núcleo (kernel) de T.

1.3 Sea $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ el espacio vectorial formado por todas las matrices cuadradas $[3 \times 3]$. Considere una matriz A en $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ tal que la traza de AB es igual a cero para cualquier otra matriz B en $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$. Demostrar que A es identicamente igual a cero.

2. Cálculo

2.1 Encontrar cuál es la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = exp(y/x)$$

2.2 Calcular la derivada $\frac{df(t)}{dt}$ de la siguiente función

$$f(t) = \int_0^t \ln(s^2 + t^2) ds$$

2.3 Considerando la expansión de la función exponencial $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, demostrar que $exp(x + y)$ =$\exp(x)\exp(y)$.

3. Problemas opcionales

3.1 Demostrar que todo conjunto abierto de la recta real es la unión a lo sumo numerable de intervalos abierto y disjuntos a pares.

3.2 Sea p un número primo y G un grupo de cardinalidad p^3 cuyo centro no sea cíclico. Probar que G debe ser abeliano.

3.3 Encuentre el número de raíces de la ecuación $z^4 + 5z + 1 = 0$ dentro del disco $|z| \leq 1$.

3.4 Demostrar que el grupo de números reales positivos con la multiplicación es isomorfo al grupo de todos los números reales con la suma.

Tambien demostrar, sin embargo, que el grupo de los números racionales positivos con la multiplicación NO es isomorfo al grupo de todos los números racionales con la suma.